

Fourier-Transformation und Saitenschwingung

Diego Semmler, Nils Höres

Inhaltsverzeichnis

Grundlagen.....	2
Motivation.....	2
Definitionen.....	2
δ -Funktion.....	2
Faltungsintegral.....	2
Skalarprodukt.....	2
Operatoren.....	2
Signalabtastung.....	2
Fourier-Transformation (FT).....	3
Fourier-Integral.....	3
Beispiele.....	3
Diskrete Fourier-Transformation (DFT).....	4
Varianten.....	4
Hahn-Fenster.....	4
FFT.....	4
DCT.....	5
Wavelet.....	5
Saitenschwingung.....	5
Einführung.....	5
d'Alambertsches Lösungsprinzip.....	5
Verfahren nach Bernoulli.....	6
Gezupfte Saite.....	6
Lösung der Aufgaben.....	8
Aufgabe 1: Stützstellen.....	8
Aufgabe 2.....	8
Aufgabe 3: Stützstellenvertauschung.....	8
Aufgabe 4: Bandbegrenzung.....	9
Aufgabe 5: Rauschunterdrückung.....	9
Grenzfrequenz.....	9
Schwelle.....	9
Mittelwert.....	9
Aufgabe 6.....	9
Aufgabe 8.....	11
Aufgabe 9.....	12
Aufgabe 10.....	13
Aufgabe 11.....	13
Aufgabe 12.....	13

Grundlagen

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Grund, warum eine Fouriertransformation nützlich ist, sowie einigen mathematischen Werkzeugen, die für die Fouriertransformation benötigt werden.

Motivation

Die Fouriertransformation überführt eine Funktion, die im Zeitbereich gegeben ist, in den Frequenzbereich. Dies ist einerseits nützlich, um Informationen über die Funktion selbst zu erhalten z.B. Frequenzmessung, als auch in der Signalverarbeitung eine bessere Unterscheidung verschiedener (Stör-)Signale zu ermöglichen, Signale zu manipulieren oder wesentliche von unwesentlichen Signalen zu trennen z.B. verwenden MP3, JPEG und Seti@home diese Methode, wobei sich diese Liste fast bis ins unendliche fortführen lässt.

Definitionen

δ-Funktion

Die δ-Funktion (im streng mathematischen Sinne ist es keine Funktion sondern eigentlich eine Distribution, das soll uns hier aber nicht weiter stören), ist eine Funktion für die gilt:

1. $f(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$
2. $\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Aus mathematischer Sicht kann man diese Funktion z.B. als Grenzwert von Gauß-Kurven, darstellen, die man immer schmaler und spitzer macht.

Faltungsintegral

Das Faltungsintegral ist wie folgt definiert: $(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y) dy$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt der Vektoren x und y wird als $\langle x|y \rangle$ geschrieben. Gemeint ist hier immer das Standard-skalarprodukt.

Operatoren

Seien die Operatoren τ_a, σ_λ wie folgt definiert:

$$\tau_a f(x) := u(x-a)$$

$$\sigma_\lambda f(x) := u\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

Signalabtastung

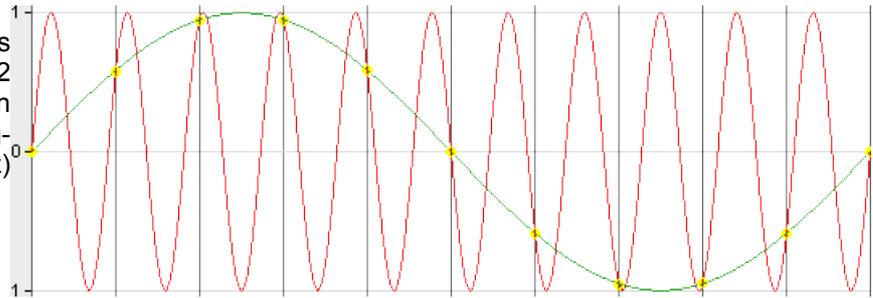
In der Regel erhalten wir ein gemessenes Signal nicht in Form eines Kontinuums, sondern als diskrete (digitale) Werte. Wenn man sich die „realen“ Werte als kontinuierliche Funktion vorstellt, entspricht die Abtastung einer Gewichtung mit δ-Funktionen.

Wie man leicht erkennen kann, gehen bei der Signalabtastung alle Informationen verloren, die nicht gerade zufällig auf einem Abtastwert liegen. Damit nicht die Information verloren geht, die man analysieren möchte, muss man die Abtastrate genügend hoch wählen.

Genügend hoch heißt, dass $F_{abtast} \geq 2 \cdot f$, wenn f die höchste Frequenz ist, die analysiert werden soll.

Alle höheren Frequenzen würden ansonsten auf niedrigere abgebildet und das Signal würde verfälscht. Da im Normalfall beliebig hohe Frequenzen auftreten können, verwendet man in der Regel vor dem AD-Wandler, der für die Signalabtastung zuständig ist, einen analogen Tiefpass.

In unserem Beispiel ist das hochfrequente rote Signal (2,2 fache der Abtastfrequenz) nicht von dem niederfrequenten grünen Signal (0,2 fache der Abtastfrequenz) zu unterscheiden.



Fourier-Transformation (FT)

Hat man eine Funktion $f(x)$ gegeben, so sei die Fouriertransformierte als $\hat{f}(x)$ bezeichnet. Die beiden Funktionen hängen über das Fourier-Integral zusammen.

Fourier-Integral

Das Fourier-Integral, das die Fouriertransformierte in Abhängigkeit von der Frequenz angibt lautet:

$$\hat{x}(f) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i \cdot f \cdot t} dt$$

Mit dieser Definition wollen wir uns für diese Versuch zufrieden geben, der Vollständigkeit halber kann man das Fourier-Integral auch für den n-dimensionalen Fall definieren. Dabei ist das Ergebnis ebenfalls n-dimensional und vom Wellenvektor k abhängig. z ist ein beliebig wählbarer Parameter, der meistens 1 gewählt wird.

$$\hat{x}(k) = (2\pi)^{n/2} z \cdot \int_{\mathbb{R}^n} x(t) e^{-i\langle t|k\rangle} dt$$

Damit lautet die allgemeine Rücktransformation:

$$x(t) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{z} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \hat{x}(k) e^{-i\langle t|k\rangle} dt$$

Man kann zeigen, dass für die Fouriertransformation folgende Regeln gelten:

Skalierungsregeln: $\widehat{\tau_a u}(x) = e^{i\langle a|x\rangle} \hat{u}(x)$ und $\widehat{\sigma_\lambda u}(x) = |\sigma_\lambda|^n \hat{u}(\lambda x) = |\sigma_\lambda|^n \sigma_{\frac{1}{\lambda}} \hat{u}(x)$

Faltungsregeln: $\widehat{u \cdot v} = \hat{u} * \hat{v}$ und $\widehat{u * v} = \hat{u} \cdot \hat{v}$

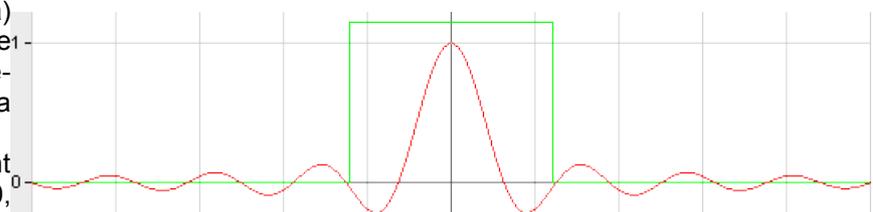
Das bedeutet insbesondere, je schmaler die Funktion im Zeitbereich, desto breiter ist die Fouriertransformierte.

Beispiele

Eine δ -Funktion der Form $\delta(x + a)$ fouriertransformiert ergibt eine Sinus-/Cosinuswelle und umgekehrt, bzw. eine Konstante im Fall $a = 0$.

Ein Block, der von $-a$ bis a Konstant ist und für alle anderen Werte 0, ergibt eine zu $\frac{\sin(x)}{x}$ proportionale Funktion.

Eine Gauß-Kurve bleibt eine Gauß-Kurve.



Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

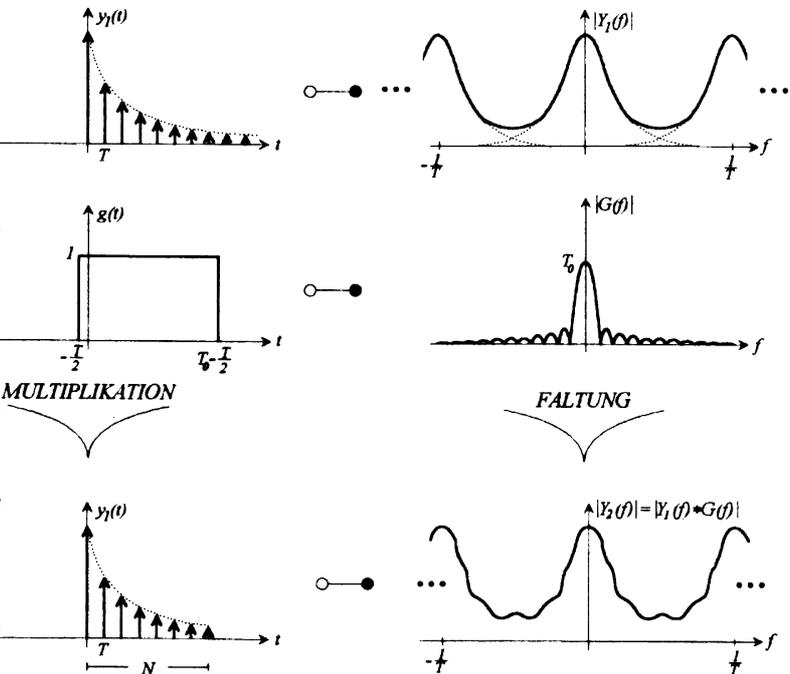
Man hat, wie oben bereits gesagt, meistens diskrete Werte zur Verfügung. Daher möchten wir die diskrete Fouriertransformation aus der allgemeinen Fouriertransformation herleiten und analysieren, welche Fehler dabei auftreten können.

Zunächst muss die kontinuierliche Funktion aus der Diskreten Fourieranalyse abgetastet werden. Einschränkungen dazu siehe im Kapitel „Signalabtastung“.

Um die Frage zu beantworten, was bei diesem Vorgang mit der Fouriertransformation geschieht, ziehen wir die Faltungsregel zu rate, die besagt, dass eine Multiplikation im Zeitbereich eine Faltung im Frequenzbereich ergibt.

Faltet man die ursprüngliche Fouriertransformierte mit der Fouriertransformierten der Abtastungsfunktion, erhält man eine periodische Funktion mit der Periodenlänge f , wobei f die Abtastfrequenz ist.

Am Bild sieht man auch, dass die verschiedenen Perioden überlappen, weshalb es wichtig ist, vor der Digitalisierung analoger Signale einen entsprechenden Tiefpass zu verwenden.



Selbstverständlich ist eine Messung in der Praxis nie von unendlicher Dauer. In der Mathematik bedeutet das, dass die ursprüngliche Funktion mit einem Block multipliziert wird, was in der Fouriertransformation die Faltung mit einer $\frac{\sin(x)}{x}$ -Funktion bedeutet. Dadurch entsteht eine gewisse Welligkeit und die Auflösung der Fouriertransformierten wird durch das Tiefpass-Verhalten der $\frac{\sin(x)}{x}$ -Funktion begrenzt.

Durch Integration einer allgemeinen Funktion mit den periodischen δ -Funktionen und dem Zeitfenster erhält man die im Script angegebene Formel der Diskreten Fourier-Transformation.

Das Problem der Welligkeit tritt besonders dann auf, wenn man periodische Funktionen mit einem nicht ganzzahligem Vielfachen der Periodendauer analysiert. Dieses Phänomen wird als „Leck-Effekt“ bezeichnet und kann die Signaldarstellung erheblich verfälschen. Eine Möglichkeit dem Entgegen zu wirken bietet das Hahn-Fenster.

Varianten

Hahn-Fenster

Das Hahn-Fenster hat den Vorteil, dass seine Fouriertransformierte nur geringe Seitenschwinger hat also auch eine beliebige Funktion, die im Zeitbereich mit dem Hahn-Fenster multipliziert wurde geringe Überschwinger hat.

Das Hahn-Fenster ist gegeben durch:

$$H_{T_0}(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\pi T_0 f)}{\pi f} + \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(\pi(T_0 f + 1))}{\pi(f + \frac{1}{T_0})} + \frac{\sin(\pi(T_0 f - 1))}{\pi(f - \frac{1}{T_0})} \right)$$

FFT

Bei der Fast Fourier-Transform spart man Zeit, indem man auf die Ergebnisse bereits berechneter Frequenzanteile zurückgreift. Der FFT-Algorithmus hat die Komplexität $O(n \log(n))$ statt $O(n^2)$ wie bei der normalen Fouriertransformation. Dies geht allerdings nur, wenn die Anzahl der zu analysierenden Werte eine

Potenz von 2 ist.

Die Verallgemeinerung der FFT sind die Radix-2^N-Algorithmen, die unter Umständen noch schneller sein können. Nachteile sind der mit zunehmendem N aufwändigere Programmcode und der eingeschränkte Wertebereich, da nur noch Potenzen von 2^N als Anzahl der Werte zugelassen sind.

DCT

Die diskrete Cosinus-Transformation rechnet im Gegensatz zur diskreten Fourier-Transformation nur mit reellen Werten und wird z.B. bei dem Bildformat JPEG eingesetzt, um die Bilddaten in eine besser komprimierbare Form zu bringen.

Wavelet

Bei der Wavelet-Transformation ist die Fensterbreite nicht durch eine feste Zeitbegrenzung gegeben, sondern hängt u.a. von der gerade untersuchten Frequenz ab. Sie wird z.B. bei JPEG 2000 eingesetzt.

Saitenschwingung

Einführung

Die formelle Grundlage für die Schwingung einer Saite mit der konstanten Dichte ρ und dem Querschnitt A, die mit einer Kraft F auf die Länge L gespannt wird, ist folgende Bewegungsgleichung:

$$\delta_t^2 y = c^2 \delta_x^2 y; c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \text{ und } \sigma = \frac{F}{A}$$

Mit den folgenden Randbedingungen für die Lösung $y(x,t)$:

$$y(0,t) = 0 \text{ und } y(L,t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{S.1})$$

$$\delta_t y(x,t)|_{t=0} = \dot{y} = G(x) \quad (\text{S.2})$$

$$y(x,0) = F(x) \quad (\text{S.3})$$

d'Alembertsches Lösungsprinzip

Die Bewegungsgleichung kann durch eine Funktion der Form $f(x \pm ct)$ erfüllt werden. Ein Ansatz mit zwei unbestimmten Funktionen ist also gegeben durch:

$$y(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

Die unbestimmten Funktionen f_1 und f_2 sind nun aus den Anfangsbedingungen bestimmbar.

Es liefern die Gleichungen (S.2) und (S.3):

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \left[F(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x G(\tau) d\tau \right]$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \left[F(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x G(\tau) d\tau \right]$$

Es gilt zusätzlich die Gleichung (S.1) welche zur Schlussgleichung führt:

$$y(x,t) = \frac{1}{2} \left[F(x-ct) + F(x+ct) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x G(\tau) d\tau \right]$$

Bei der d'Alembertschen Lösung ist anschaulich zu sehen wie die Bewegung einer schwingenden Saite abläuft. Hierbei lässt sich die Saitenschwingung als Überlagerung zweier gegeneinander bewegter Wellen deuten, welche wiederum durch die Anfangsbedingungen hinreichend erklärt werden. Die d'Alembertsche Methode kann sowohl stehende als auch fortschreitende Wellen behandeln, macht aber keine Aussage über das Spektrum, womit noch eine weitere Lösungsmethode benötigt wird.

Verfahren nach Bernoulli

Das Verfahren nach Bernoulli kann nur auf stehende Wellen angewandt werden, da es aus einem Produktansatz gewonnen wird. Hierbei liefert der Separations-Ansatz:

$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

angewendet auf die Wellengleichung:

$$\frac{c^2}{T(t)} \delta_t^2 T(t) = \frac{1}{X(x)} \delta_x^2$$

Entstehen zwei Gleichungen die einerseits nur von t und andererseits nur von x abhängig sind. Somit müssen die beiden Gleichungen gleich einer Konstanten sein, die hier mit k^2 bezeichnet wird. Somit lässt sich die Gleichung in 2 Differentialgleichungen mit den periodischen Lösungen:

$$T(t) = A \cos(ckt) + B \sin(ckt) \quad X(x) = C \cos(kx) + D \sin(kx) \quad \text{schreiben.}$$

Die allg. Lösung lautet also:

$$y(x, t) = (A \cos(ckt) + B \sin(ckt))(C \cos(kx) + D \sin(kx))$$

Die Konstanten A,B,C,D werden später mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt.

(S.1) liefert :

$$y(0, t) = 0 = (A \cos(ckt) + B \sin(ckt))C \rightarrow C = 0$$

und

$$y(L, t) = 0 = (A \cos(ckt) + B \sin(ckt))D \sin(kL) \rightarrow D \sin(kL) = 0$$

$D=0$ beschreibt eine nicht ausgelenkte Saite, was für den weiteren Versuch nicht von Bedeutung ist.

Somit gilt: $\sin(kL) = 0$ und wegen der 2π Periodizität der Sinus-Funktion $k = k_n = n \frac{\pi}{L} \forall n \in \mathbb{N}$

Wie bereits beschrieben folgt die allg. Lösung mit $a_n = A_n$ und $b_n = B_n D_n$ als Superposition zweier Wellen:

$$y(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos(k_n ct) + b_n \sin(k_n ct)) \sin(k_n ct)$$

Unter Verwendung der Anfangsbedingungen (S.2)&(S.3) folgt:

$$y(x, 0) = F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos k_n x \quad \text{und} \quad y(x, 0) = G(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \sin k_n x$$

Woraus sich mit Hilfe der Fouriertransformation die Koeffizienten bestimmen lassen:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin(n \frac{\pi}{L}) x dx \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{n \pi c} \int_0^L G(x) \sin(n \frac{\pi}{L}) x dx$$

Gezupfte Saite

Von Interesse ist bei diesem Versuch besonders die gezupfte Saite, für welche die folgenden Randbedingungen gelten:

$$y(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad y(L, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\delta_t y(x, t) = 0 = G(x) = 0$$

$$y(x, 0) = F(x) = \frac{xH}{x_0} \text{ für } 0 < x \leq x_0, \quad \frac{H(L-x)}{L-x_0} \text{ für } x_0 \leq x \leq L$$

Womit für die d'Alambert Methode gilt:

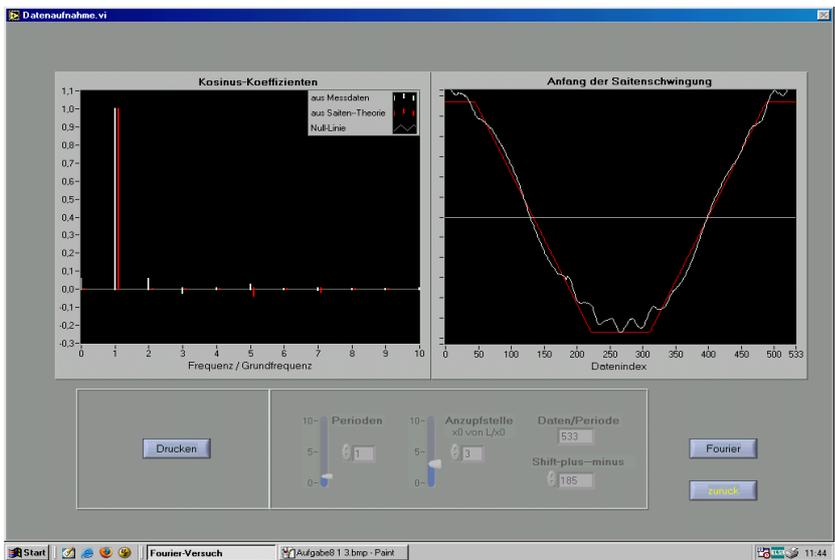
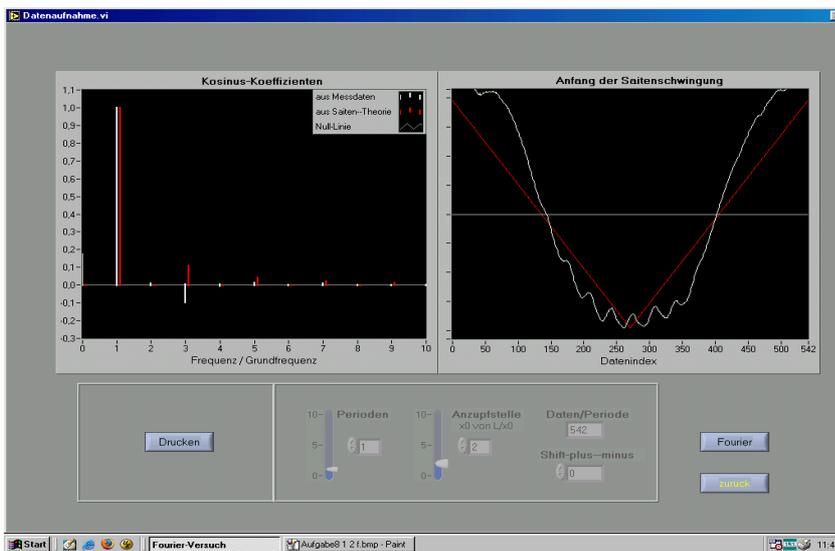
$$y(x, t) = \frac{1}{2} [F(x - ct) + F(x + ct)]$$

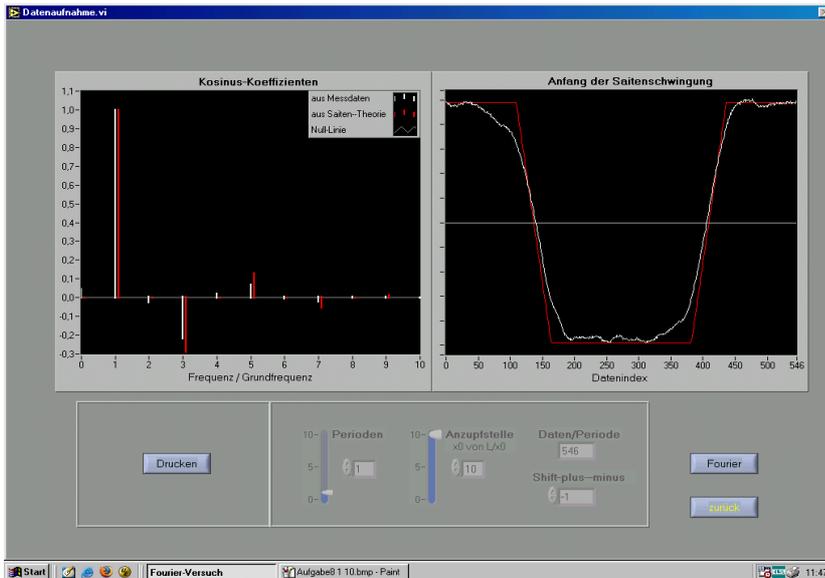
Und die Bernoulli-Methode, mit den Koeffizienten:

$$a_n = \frac{2h}{a(L-a)} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L G(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx = 0$$

ergibt:
$$y(x, t) = \frac{2hL^2}{a(L-a)\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi c}{L} t$$





Lösung der Aufgaben

Aufgabe 1: Stützstellen

Bei 8 Stützstellen deutlich den runden Charakter, der aus den verschiedenen Schwingungsmoden herrührt, während die Rechteck-Funktion bei 32 Stützstellen bereits recht gut abgebildet wird. Bei 128 Stützstellen sind bis auf das Gibb'sche Phänomen nur noch kleine Unterschiede von der Originalfunktion erkennbar.

Aufgabe 2

Was man in den drei Bildern gut erkennen kann, ist dass die Höhe der Überschinger nicht abnimmt sondern lediglich deren Breite.

Dieses Phänomen kann man ebenfalls gut, wenn man Bilder mit scharfen Rändern zu stark JPEG-Komprimiert.

Aus mathematischer Sicht konvergiert die Fourier Reihe nicht absolut gegen das Original, sondern nur Punktweise.

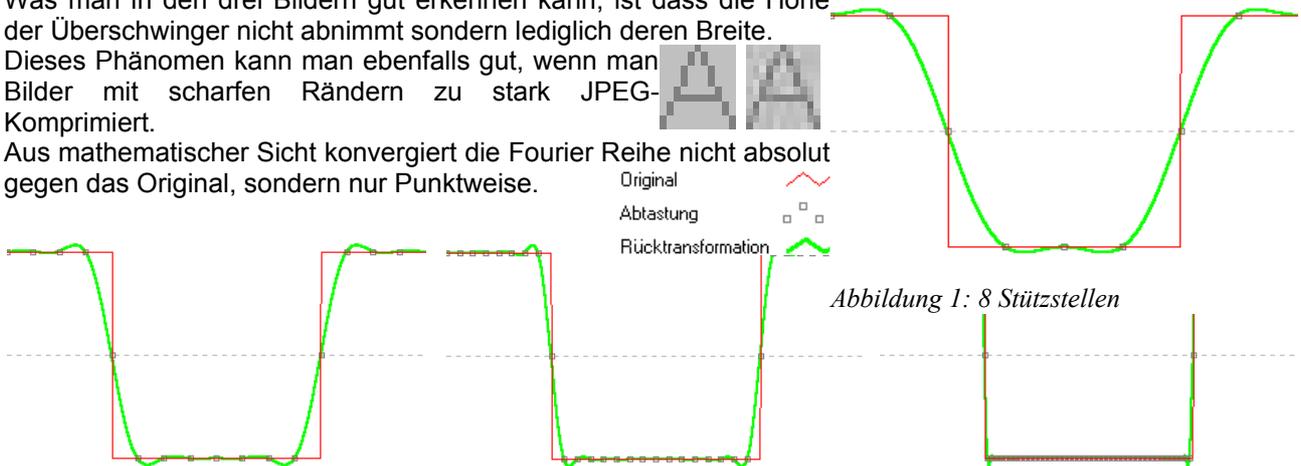


Abbildung 2: 16 Stützstellen

Abbildung 4: 32 Stützstellen

Abbildung 3: 128 Stützstellen

Aufgabe 3: Stützstellenvertauschung

Bei einer zyklischen Vertauschung der Stützstellen findet eine Drehung im imaginären Zahlenraum um den Null-Punkt statt. Das bedeutet, dass sich zwar am Betrag der Fourierkoeffizienten nichts ändert, aber das Verhältnis zwischen Imaginär- und Realteil ändert sich, sowie die Vorzeichen der Koeffizienten.

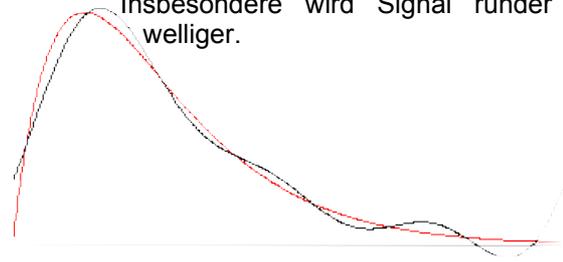
Aufgabe 4: Bandbegrenzung

Bei einer Bandbegrenzung werden die Hochfrequenten Anteile eines Signals entfernt. Dadurch geht Information verloren, weshalb die Rekonstruktion (schwarz) nicht mehr so



gut gelingt.

Insbesondere wird Signal runder und welliger.



Aufgabe 5: Rauschunterdrückung

Grenzfrequenz

Dieser Filter ist ein Tiefpass, der alle Frequenzanteile, die höher als die gegebene Grenzfrequenz sind, unterdrückt.

Hat man ein Signal mit ausschließlich tiefen Frequenzen, kann man mit diesem Filter das Rauschen mindern, ohne einen Signalverlust zu erleiden.

Schwelle

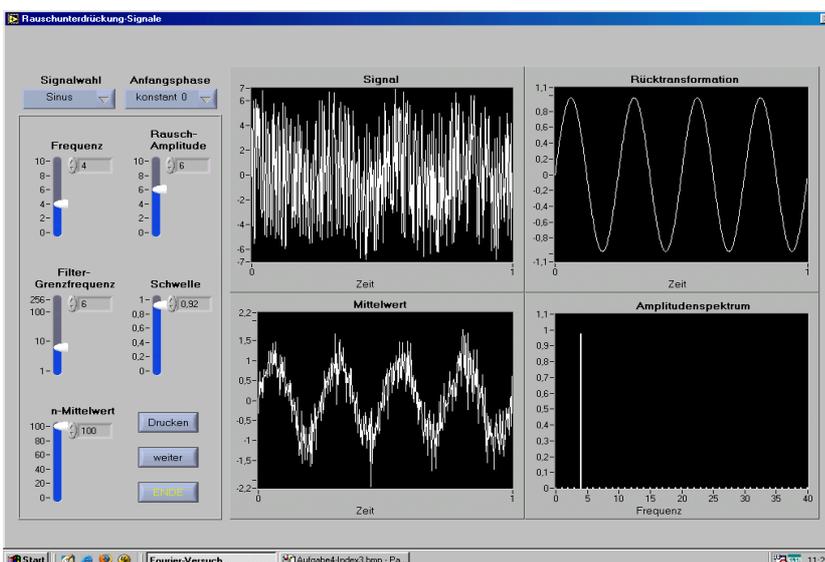
Bei diesem Filter werden alle Fourierkoeffizienten, die kleiner als die gegebene Schwelle sind, auf 0 gesetzt. Hat man ein Signal, dessen Fourierkoeffizienten deutlich stärker sind, wie die des Rauschens, kann man das Rauschen auf diese Weise einfach abschalten.

Mittelwert

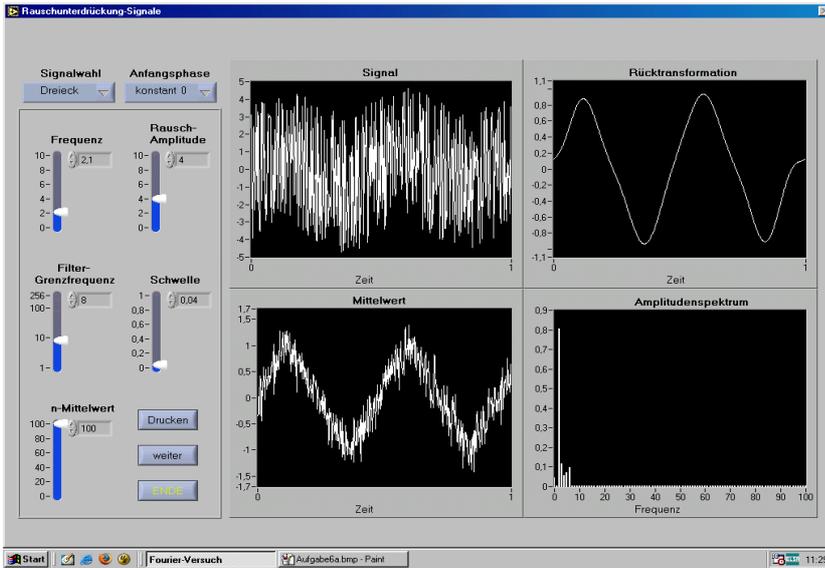
Dieser Filter bildet den Mittelwert über n Perioden. Dadurch mittelt sich das Rauschen z.T. weg und das Signal tritt klarer hervor, sodass man mit den ersten beiden Filtern besser arbeiten kann.

Dies gelingt allerdings nur bei einem Periodischen Signal, dessen Periodenlänge und -phase man kennt - sonst mittelt man das Signal ebenfalls weg.

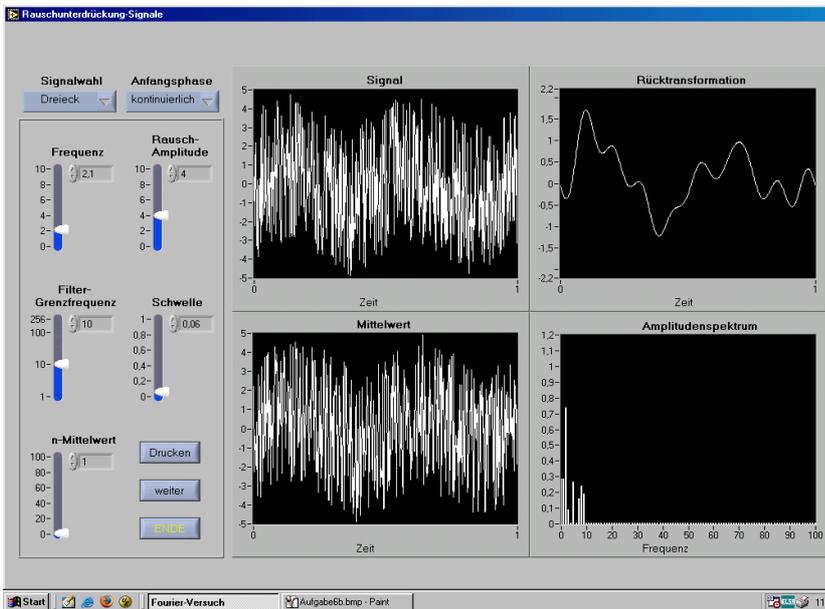
Aufgabe 6



Das Sinus-Signal besteht lediglich aus einer Frequenz, dessen Phase bekannt ist. Daher kann man zunächst den Mittelwert über 100 Werte bilden, was das Rauschen abschwächt. Zusätzlich schneidet man alle Frequenzen weg, die höher sind als der Sinus und setzt die Schwelle auf einen Wert, der knapp unter der Stärke des Sinus ist (in unserem Fall 0,92), um das Rauschen unterhalb der Frequenz des Sinus zu entfernen. Damit konnten wir das Ursprungssignal sogar vollständig wiederherstellen.

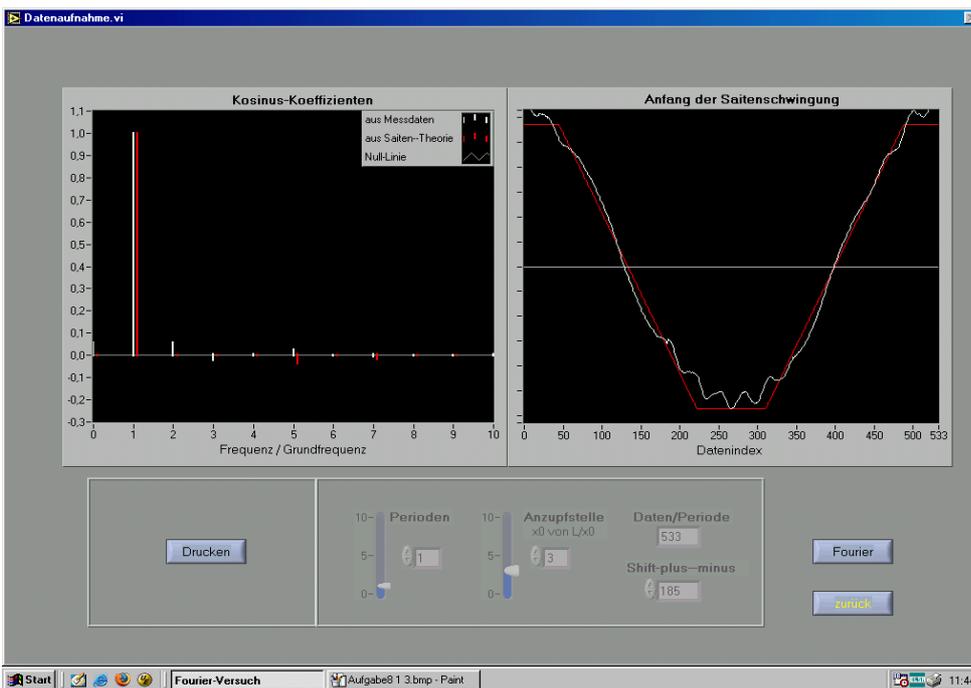
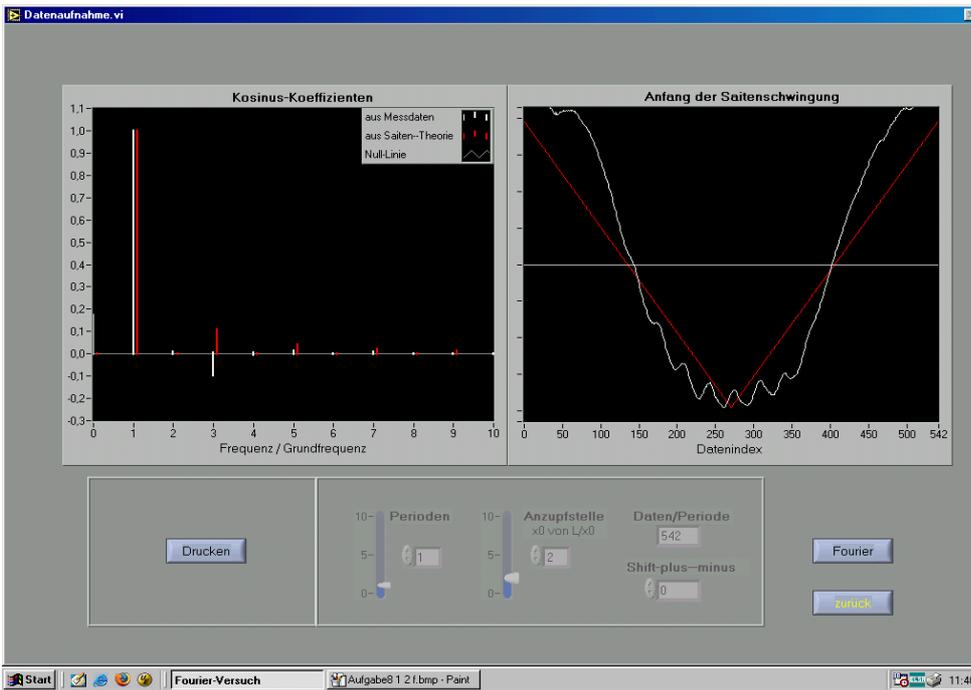


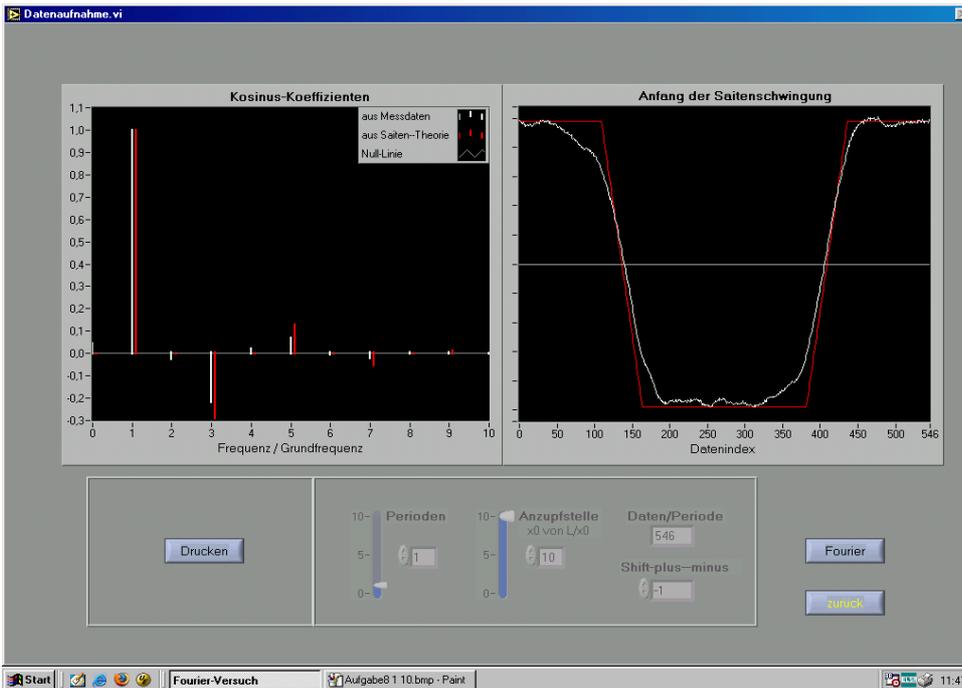
Auch bei dem Dreiecks-Signal, dessen Phase bekannt ist, bildet man den Mittelwert über 100 Werte. Wir haben als Filtergrenzfrequenz 8 gewählt, da die Fourierkoeffizienten des Signals immer kleiner werden und bei höheren Werten vom Rauschen komplett überdeckt werden. Die Schwelle haben wir auf 0,04 gesetzt, um keine Rauscher unterhalb der Grenzfrequenz zu dämpfen. Damit konnten wir das Ursprungssignal recht gut wiederherstellen.



Ist die Anfangsphase kontinuierlich, nutzt der Mittelwertfilter nichts. Daher haben wir ihn auf 1 belassen. Die Grenzfrequenz haben wir auf 10 und die Filterschwelle auf 0,06 gesetzt. Diese Werte sind experimentell und das Ergebnis ist recht ärmlich. Ein so starkes Rauschen lässt sich daher mit den uns gegebenen Filtern nicht entfernen.

Aufgabe 8





Aufgabe 9

Theoretische Fourier-Koeffizienten

a_n	L/2	L/3	L/10
a1	1,0000	1,0000	1,0000
a2	0,0000	0,0000	0,0000
a3	0,1111	0,0000	-0,2909
a4	0,0000	0,0000	0,0000
a5	0,0400	-0,0400	0,1294
a6	0,0000	0,0000	0,0000
a7	0,0204	-0,0204	-0,0534
a8	0,0000	0,0000	0,0000
a9	0,0123	0,0000	0,0123
a10	0,0000	0,0000	0,0000
a11	0,0083	0,0083	0,0083
a12	0,0000	0,0000	0,0000
a13	0,0059	0,0059	-0,0155
a14	0,0000	0,0000	0,0000
a15	0,0044	0,0000	0,0144

Zupfstelle: 1/2:

n	a_n	b_n	c_n	φ_n
0	0,000834		0,000834	0,000000
1	0,386199	0,000000	0,386199	0,000000
2	2,227483	0,084346	2,229079	0,037848
3	0,022605	0,000531	0,022611	0,023470
4	-0,218281	0,008025	0,218428	-0,036747
5	-0,013207	-0,004984	0,014116	0,360821
6	0,025782	-0,057826	0,063313	-1,151393
7	-0,001028	-0,003955	0,004086	1,316533
8	0,016976	0,016842	0,023913	0,781451
9	-0,000024	-0,000825	0,000825	1,541747
10	-0,000333	0,015541	0,015545	-1,549345
11	-0,001720	0,000853	0,001920	-0,460676
12	-0,004753	0,004902	0,006828	-0,800881
13	-0,004830	0,003383	0,005897	-0,611037
14	-0,001536	0,004362	0,004624	-1,232201
15	-0,007936	-0,009940	0,012719	0,897039

Zupfstelle: 1/3:					Zupfstelle: 1/10:				
n	a_n	b_n	c_n	φ_n	n	a_n	b_n	c_n	φ_n
0	0,000000		0,000000		0	0,001117		0,001117	0,000000
1	0,172199	0,000000	0,172199	0,000000	1	0,049828	0,000000	0,049828	0,000000
2	2,980379	0,011304	2,980400	0,003793	2	1,155291	-0,042567	1,156074	-0,036828
3	0,165031	-0,038842	0,169540	-0,231154	3	-0,032530	-0,020315	0,038352	0,558226
4	-0,068493	0,043676	0,081233	-0,567660	4	-0,256050	0,005619	0,256112	-0,021941
5	0,008738	-0,024587	0,026093	-1,229325	5	0,025498	0,015143	0,029656	0,535898
6	0,072813	-0,072631	0,102845	-0,784148	6	0,081037	0,021801	0,083918	0,262799
7	0,007950	0,006904	0,010529	0,715052	7	-0,009957	-0,006171	0,011714	0,554851
8	-0,023805	0,030296	0,038530	-0,904804	8	-0,025352	-0,010660	0,027502	0,398016
9	0,006304	-0,003892	0,007409	-0,553097	9	0,004499	-0,001814	0,004851	-0,383282
10	0,001163	0,003614	0,003797	1,259390	10	-0,001889	-0,009147	0,009340	1,367179
11	-0,014272	0,004681	0,015020	-0,316910	11	-0,000493	0,001486	0,001566	-1,250285
12	-0,014567	-0,000964	0,014599	0,066113	12	-0,000264	-0,000167	0,000312	0,563054
13	0,009106	0,012549	0,015505	0,943103	13	0,002555	-0,002883	0,003852	-0,845592
14	0,003578	-0,001228	0,003782	-0,330555	14	-0,002492	0,003614	0,004390	-0,967070
15	0,015374	-0,002534	0,015581	-0,163370	15	-0,000124	-0,000268	0,000295	1,135770

Aufgabe 10

Die Grundfrequenz der Saite ergibt sich zu:

$$T = \frac{D}{D_R} = \frac{270 \text{ Seq}}{5000 \frac{\text{Seq}}{\text{s}}} = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow f = \frac{1}{T} = 185,19 \text{ HZ}$$

Aufgabe 11

Die Kraft auf die eingespannte Saite ergibt sich zu:

$$F = \sigma A = c^2 \rho A = \frac{\lambda^2}{T^2} \rho \pi r^2 = \frac{(2L)^2}{T^2} \rho \pi r^2; \rho := 7,85, r := 0,125 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{2L}{n} = 2 \text{ m}; n := 1 \text{ als Grundschiwingung} \Rightarrow F = 52,86 \text{ N}$$

Aufgabe 12

Für die Mindestauslenkung, um jedem der 512 möglichen Pixeln einen Wert zuzuweisen, muss gelten:

$$\frac{512}{4096} 34 \text{ mm} = 4,25 \text{ mm} \Rightarrow \text{Mindestauslenkung} = 4,25 \frac{\text{mm}}{2} = 2,125 \text{ mm}$$